ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $x(y')^2 - y' - y = 0$

2. $(y')^3 - (y')^2 + y = 0$

ΛΥΣΗ

1. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$y = x(y')^2 - y' ,$$

και άρα είναι τύπου Lagrange. Θέτοντας $p := \dfrac{dy}{dx}$, έχουμε

$$y = xp^2 - p , \quad (1)$$

και παραγωγίζοντας ως προς x, παίρνουμε

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx} ,$$

ή

$$(2xp-1)\frac{dp}{dx} = p - p^2 , \quad (2)$$

Έστω τώρα ότι $p^2 - p \neq 0$. Τότε η εξίσωση (2) είναι γραμμικής μορφής ως προς την αντίστροφη συνάρτηση $x(p)$ αφού

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(p-1)} . \quad (3)$$

Επιλύοντας την (3) με το γνωστό τρόπο παίρνουμε

$$x(p) = \frac{p + \ln|p| + C}{(p-1)^2} ,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Έτσι, η *γενική λύση* της αρχικής εξίσωσης δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις σχέσεις

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE

$$x = \frac{p + \ln|p| + C}{(p-1)^2}, \quad y = xp^2 - p, \quad p \in R, \quad (4)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Επιπλέον, αν $p=0$ ή $p=1$ τότε από την (1) παίρνουμε ως *ιδιάζουσες λύσεις* της εξίσωσης τις συναρτήσεις

$$y \equiv 0, \quad (5)$$

ή

$$y = x - 1, \quad (6)$$

αντίστοιχα.

2. Η δοθείσα διαφορική εξίσωση είναι

τύπου Lagrange με $g(p) \equiv 0$, $f(p) = p^2 - p^3$. Θέτοντας $p := \frac{dy}{dx}$, έχουμε

$$y = p^2 - p^3, \quad (1)$$

και παραγωγίζοντας ως προς x, παίρνουμε

$$p = (2p - 3p^2)\frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Αν $p \neq 0$ τότε από την (2) έχουμε

$$\frac{dx}{dp} = 2 - 3p, \quad (3)$$

και άρα

$$x(p) = 2p - \frac{3}{2}p^2 + C,$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Έτσι, η *γενική λύση* της αρχικής εξίσωσης δίνεται σε παραμετρική μορφή από τις σχέσεις

$$x = 2p - \frac{3}{2}p^2 + C, \quad y = p^2 - p^3, \quad p \in R, \quad (4)$$

ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ LAGRANGE

όπου C είναι μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Αν τώρα $p = 0$ τότε από την (1) παίρνουμε ως *ιδιάζουσα λύση* της εξίσωσης τη συνάρτηση

$$y \equiv 0. \quad (5)$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ LAGRANGE